Gestalt の理論の紹介

鈴木唯乃（東京理科大学 理学部第二部数学科 3 年）

2026-11-04

本講演の目標

目標：Scholze–Stefanich による新しい空間概念 Gestalt について概説する。

内容：どのような概念なのか、特有の現象、それに対する “幾何” の一側面の紹介

Remark —— 詳しい方向けの注意

(∞, n)-圏のことを単に n-圏と呼ぶ。

全体的に presentable な設定で考えるが、深くは踏み込まない。

参考文献：Scholze, “Geometry and Higher Category Theory”, 2026.

0 貼り合わせによる空間概念

1 Gestalt とは？

2 Gestalt の幾何

3 まとめ

0 貼り合わせによる空間概念

1 Gestalt とは？

2 Gestalt の幾何

3 まとめ

貼り合わせとトポス

🔎 Observation

空間概念は、指定された “もととなる空間”たち（affine object と呼ぶことにする）の（良い）“貼り合わせ” で得られる対象として定義されることが多い。

⬢ Example

(1) 多様体。　“もととなる空間” = $\mathbb{R}^n$（の開集合）。

(2) スキーム。“もととなる空間” = 可換環 A に対するアフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$.

貼り合わせとトポス

これらをもう少し圏論的な文脈に載せる。

➡ site (C, τ) 上の層トポス $\mathrm{Shv}_\tau(\mathrm{C})$（Grothendieck トポス）を考える！

- 圏 C が “もととなる空間” の圏。
- Grothendieck 位相 τ は “それらをどう貼り合わせるか” を指定するデータ。
- $\mathrm{Shv}_\tau(\mathrm{C})$ は “もととなる空間の τ に沿った貼り合わせで得られる対象全体” の圏。

Recall: small site (C, τ) に対して、前層圏 $\mathrm{PShv}(\mathrm{C})$ は C の自由余完備化であり、層トポス $\mathrm{Shv}_\tau(\mathrm{C})$ はその左完全反映的局所化 ($\fallingdotseq$ relation で割る) であった。

貼り合わせとトポス

🔎 Observation

多様体やスキームの圏は、特定の (C, τ) に対する $\mathsf{Shv}_\tau(\mathsf{C})$ に忠実充満に埋め込める！

(1) $\mathsf{Mfd} \hookrightarrow \mathsf{Shv}_{\text{open-cover}}(\{\, \mathbb{R}^n \text{ の open subset 全体 } \})$; $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mfd}}(-, M)$.

(2) $\mathsf{Sch} \hookrightarrow \mathsf{Shv}_{\mathsf{Zariski}}(\mathsf{CRing}^{\mathrm{op}})$; $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sch}}(-, X)$.

さらに、多様体やスキームは、$\mathsf{Shv}_\tau(\mathsf{C})$ の対象のうち “affine な open subobject たちで被覆される” ものとして特徴づけられる。

貼り合わせとトポス

トポスは、“そこでの貼り合わせが良い振る舞いをする” ような圏になっている。

指導原理：幾何的対象の住む “一番外側の圏” は、トポスであるべき！

> ✧ Summary
>
> - affine object たちを指定した方法で “貼り合わせた” 対象の圏が層トポス。
> - 幾何学における多くの空間概念は、対応する層トポスの対象の特別なクラスと思える。
> - トポスは貼り合わせに関して良い性質を持つ。
>
> ➡ 空間概念を扱う上での ambient category はトポスであってほしい。

0 貼り合わせによる空間概念

1 Gestalt とは？

2 Gestalt の幾何

3 まとめ

観察：空間と圏

可換環 A に対して、その上の加群全体の圏 Mod_A が考えられる。

> ■ **Proposition**
>
> 関手
>
> $$\mathrm{CRing} \longrightarrow \{\text{symmetric monoidal presentable Abelian categories}\}\ ;\ A \mapsto \mathrm{Mod}_A$$
>
> は忠実充満である。

➡ Mod_A は A の情報を十分に保持している。

観察：空間と圏

同様に、スキーム X に対して、その上の準連接層全体の圏 $\mathsf{QCoh}(X)$ が考えられる。

Recall: $\mathsf{QCoh}(\operatorname{Spec} A) \simeq \mathsf{Mod}_A$.

> **Theorem** —— スキームの “淡中双対” (Brandenburg–Chirvasitu)
>
> 関手
>
> $$\mathsf{Sch}^{\mathrm{qcqs}} \longrightarrow \{\text{sym. mon. presentable Abelian categories}\}^{\mathrm{op}} \ ; \ X \mapsto \mathsf{QCoh}(X)$$
>
> は忠実充満である。

➡ $\mathsf{QCoh}(X)$ は X の情報を十分に保持している。

圏による幾何学

そこで、次のような発想に至る：

Q. 一般の対称モノイダル局所表示可能圏を “幾何的対象” とする幾何学ができないか？

これは実際に以前から考えられていて、tensor categorical algebraic geometry や 2-algebraic geometry などと呼ばれる。

前者はこのアイデアを明示的かつ体系的に取り扱っている Brandenburg, “Tensor categorical foundations of algebraic geometry” (2014) で用いられている名称。

Gestalt の発想

ここでは、これをさらに推し進めて、次のようなことを考える：

Q. 一般の対称モノイダル局所表示可能 n-圏を “幾何的対象” とする幾何学ができないか？

Remark —— なぜ高次圏を考えるのか？（注：不正確な説明！）

スキームは QCoh から復元できたが、スキームより広いクラスの空間（例：代数的スタック）を考えると、QCoh では情報が失われすぎることがある。
しかし、代わりに “高次圏を値に取る層の圏” nQCoh $(n \geq 2)$ を考えると状況が改善する：
例えば $(n-1)$QCoh で区別できない空間同士が nQCoh では区別できたりする。

Stefanich ring

Gestalt では、これの “極限” を考える。

◆ **Definition** —— Stefanich ring

(以下、正則基数 $\kappa > \aleph_0$ を固定する。$\kappa = \aleph_1$ とすれば十分。)

各 $n \geq 1$ に対する対称モノイダル局所 κ-表示可能 n-圏 A_n の列

$$A = (A_1, A_2, A_3, ...)$$

であって、$\mathrm{End}_{A_{n+1}}(\mathbb{1}_{A_{n+1}}) \simeq A_n$ なるものを **Stefanich ring** という。

Stefanich ring 全体のなす圏を StRing と書く。

StRing は次のような極限で書ける： $\mathrm{StRing} \simeq \lim \left(\cdots \xrightarrow{\mathrm{End}_{(-)}(\mathbb{1})} \mathrm{CAlg}(3\mathrm{Pr}) \xrightarrow{\mathrm{End}_{(-)}(\mathbb{1})} \mathrm{CAlg}(2\mathrm{Pr}) \xrightarrow{\mathrm{End}_{(-)}(\mathbb{1})} \mathrm{CAlg}(1\mathrm{Pr}) \right)$.

Stefanich ring

Example —— Stefanich ring の例

(1) $A \in \mathrm{CRing}$ に対し次の Stefanich ring を与える関手 $\mathrm{CRing} \to \mathrm{StRing}$ が定まる：

$$\left(\mathrm{Mod}_A,\ 1\mathrm{Pr}_A := \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_A}(1\mathrm{Pr}),\ 2\mathrm{Pr}_A := \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_A}(1\mathrm{Pr})}(2\mathrm{Pr}),\ \ldots\right)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cap & & \cap & & \cap & & \\ \mathrm{CAlg}(1\mathrm{Pr}) & \xleftarrow{\mathrm{End}_{(-)}(\mathbb{1})} & \mathrm{CAlg}(2\mathrm{Pr}) & \xleftarrow{\mathrm{End}_{(-)}(\mathbb{1})} & \mathrm{CAlg}(3\mathrm{Pr}) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

気持ち：

$$n\mathrm{Pr}_A = \{\ A\text{-linear symmetric monoidal } \kappa\text{-presentable } n\text{-categories}\ \}$$

一般に、$C \in \mathrm{CAlg}(n\mathrm{Pr})$ に対して Mod を繰り返しとることで Stefanich ring が得られ、

忠実充満関手 $\mathrm{CAlg}(n\mathrm{Pr}) \hookrightarrow \mathrm{StRing}$ を定める。

Stefanich ring

Example —— Stefanich ring の例

(2) $\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} := \mathrm{CRing} \to \mathrm{StRing}$ は Zariski 位相（より強く、fpqc 位相）に関して層になる。

➡ これは $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{StRing}$ に拡張する。

特に、スキーム（より広く、代数的スタック）は Stefanich ring を定める。

Gestalt

ここでは、Stefanich ring が affine な対象に相当する。 それに名前をつける：

> ◆ **Definition**
>
> $\mathrm{Gest} := \mathrm{StRing}^{\mathrm{op}}$ とおき、Gest の対象を **Gestalt** という。

普通なら、ここから空間概念を定義しようと思うと、まず反対圏である Gest 上に何らかの Grothendieck 位相を入れて、次に層の圏を考えてトポスを作る。

Gestalt

しかし驚くべきことに、Gestalt では**その必要がない！**

> **Theorem** —— Scholze–Stefanich
>
> 任意の $n \geq 0$ と $S \in \mathsf{Gest}$ に対して、S 上の n-étale Gestalt 全体のなす圏
>
> $$\mathsf{Gest}_{/S}^{n\text{-ét}}$$
>
> は κ-ary pretopos である。

Remark

- 0-étale $\Rightarrow$ 1-étale $\Rightarrow$ 2-étale $\Rightarrow \cdots$
- 通常扱う幾何的対象が定める Gestalt は 1-étale, 2-étale 程度。

Gestalt

つまり、affine object の圏がすでに実質的にトポスのように振る舞っている！

これは通常全く起こらない現象。

Example

Aff $:=$ CRing$^{\mathrm{op}}$ はトポスでない。

もしトポスなら、射 $Y \overset{f}{\to} X$ に対し base change $f^* : \mathrm{Aff}_{/X} \to \mathrm{Aff}_{/Y}$ が colimit を保つ。

CRing 側で考えると係数拡大 $B \otimes_A (-) : \mathrm{CAlg}_A \to \mathrm{CAlg}_B$ が limit を保つという意味で、

これは一般の $A \to B$ in CRing に対しては全く成り立たない！

同じく、CAlg$(n\mathrm{Pr})^{\mathrm{op}}$ もトポスからは程遠い。

0 貼り合わせによる空間概念

1 Gestalt とは？

2 Gestalt の幾何

3 まとめ

前史：six-functor formalism

多様体やスキームなどの幾何的空間 X を調べたい！

➡ 典型的手法：X から**コホモロジー**という代数的な不変量 $\mathrm{H}^*(X)$ を割り当て、$\mathrm{H}^*(X)$ を代数的に調べる。

Example —— コホモロジー論の例

(1) 多様体 $M \longmapsto$ **特異コホモロジー** $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{Z}) \in \mathsf{Ab}$.

(2) 標数 0 の体 k 上のスキーム X

$\longmapsto$ **代数的 de Rham コホモロジー** $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X/k) \in \mathsf{Vect}_k$.

(3) 体 k 上のスキーム X と素数 $\ell \neq \mathrm{char}\, k$

$\longmapsto \ell$ **進 étale コホモロジー** $\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X;\mathbb{Q}_\ell) \in \mathsf{Vect}_{\mathbb{Q}_\ell}$.

前史：six-functor formalism

🔎 **Observation** —— six-functor formalism

コホモロジー論 H^* を考えたいとする。 このとき、空間 Xに対して、

- “コホモロジー論の係数の圏” と呼ばれる対称モノイダル閉圏 $D(X)$
- 射 $Y \xrightarrow{f} X$ に付随する随伴

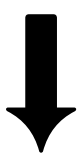
$$D(X) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} D(Y) \qquad D(Y) \underset{f^!}{\overset{f_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} D(X)$$

で、便利な性質をみたしたり、D の情報からコホモロジー $\mathrm{H}^*(X)$ が復元できるようなものが構成できることがある。 このデータ群を **six-functor formalism** という。

しばしば、D は $\mathrm{H}^*(X)$ よりも真に豊かな構造をもち、X の幾何的情報をより繊細に捉えられる。

前史：six-functor formalism

six-functor formalism $D(X), f^*, f_*, f_!, f^!, \otimes, \mathrm{Hom}$



“de-categorify”

コホモロジー $\mathrm{H}^*(X)$

前史：six-functor formalism

Example —— six-functor formalism の例

(1) 局所コンパクトハウスドルフ (LCH) 位相空間 X 上の $D(\mathbb{Z})$ 値 **層**の圏 $\mathrm{Shv}(X;\mathbb{Z})$.

これは 6FF をもち、特異コホモロジーを復元する。

(2) 標数 0 の体 k 上の有限型分離スキーム X 上の**代数的 D 加群**の導来圏 $\mathrm{DMod}(X)$.

これは 6FF をもち、代数的 de Rham コホモロジーを復元する。

(3) 体 k 上の有限型分離スキーム X 上の ℓ **進層**の構成可能導来圏 $D_c^b(X;\mathbb{Q}_\ell)$.

これは 6FF をもち、ℓ 進 étale コホモロジーを復元する。$(\ell \neq \mathrm{char}\, k)$

six-functor formalism で幾何的性質をとらえる

射 $Y \xrightarrow{f} X$ の幾何的性質により、6FF の関手 $f_*, f_!, f^*, f^!$ が “退化” することがある。

Example

$D = \mathrm{Shv}(-;\mathbb{Z})$ on LCH / $D_c^b(-;\mathbb{Q}_\ell)$ on $\mathrm{Sch}_k^{\mathrm{ft,sep}}$ を考える。

(1) f が proper / proper $\Rightarrow$ $f_* \simeq f_!$

(2) f が local homeo. / étale $\Rightarrow$ $f^* \simeq f^!$

(3) f が manifold bundle / smooth $\Rightarrow$ $f^!\mathbb{1} \otimes f^*(-) \simeq f^!$ かつ $f^!\mathbb{1}$: $\otimes$-可逆

観察：右辺の条件は 6FF の言葉のみで記述されている！

six-functor formalism で幾何的性質をとらえる

◆ **Definition**

有限完備な圏 C 上の 6FF D と C の射 $Y \xrightarrow{f} X$ に対して、

(1) f が **D-proper** :⇔ canonical に $f_* \simeq f_!$ となる。

(2) f が **D-étale** :⇔ canonical に $f^* \simeq f^!$ となる。

(3) f が **weakly D-smooth** (resp. **D-smooth**)

:⇔ canonical に $f^!\mathbb{1} \otimes f^*(-) \simeq f^!$（resp. かつ $f^!\mathbb{1}$: $\otimes$-可逆）となる。

➡ これらを考えることで、 formal な性質を先に調べておくことができる！

transmutation

■ **Proposition** —— transmutation

有限完備な圏 C 上の κ-presentable six-functor formalism D に対して、関手

$$[-]_D : \mathsf{C} \to \mathsf{Gest}$$

が構成でき、次が成り立つ：

(1) 誘導される関手 $[-]_D : \mathsf{C} \to \mathsf{Gest}_{/[*]_D}$ は有限極限を保つ。

(2) $X \in \mathsf{C}$ に対して、$D(X) = \mathsf{QCoh}([X]_D)$. （$\mathsf{QCoh} : \mathsf{Gest}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{1Pr}$ は 1-圏成分を取り出す関手）

標語： 任意の “係数の圏” $D(X)$ は、Gestalt 上の “準連接層の導来圏” として表せる。

$[X]_D$ をしばしば X の **transmutation** という。

transmutation

一般に、Gestalt の射に対し **n-proper, n-suave, n-étale** $(n \geq 0)$ という性質が定義される。

> ■ **Proposition**
>
> D を C 上の 6FF とし、$Y \xrightarrow{f} X$ を C の truncated な 射とする。 このとき、
>
> (1) f が D-proper $\quad\Leftrightarrow\quad$ $[f]_D$ が 0-proper
>
> (2) f が weakly D-smooth $\quad\Leftrightarrow\quad$ $[f]_D$ が 0-suave
>
> (3) f が D-étale $\quad\Leftrightarrow\quad$ $[f]_D$ が 0-étale

➡ この意味で、Gestalt は実用的に見ても “幾何学” を捉えられる概念になっている。

0 貼り合わせによる空間概念

1 Gestalt とは？

2 Gestalt の幾何

3 まとめ

まとめ

✧ **Summary** —— 1 章のまとめ

- 幾何的対象上の “層の対称モノイダル圏” から対象自身が復元されることから、対称モノイダル圏自体を幾何的対象として扱うアイデアに至る。
- Gestalt ではその発想を推し進め、全ての n に対する対称モノイダル n-圏をひとつのデータとしてもつ Stefanich ring という対象を考える。 Gestalt はその形式的双対。
- Gestalt の圏は affine な対象の圏であるのにも関わらず、トポスのように振る舞う。
- トポスは “そこでの貼り合わせが良く振る舞うような圏” だから、さらに層トポスへ移行せずとも、Gestalt の圏は幾何学的対象の圏として十分に良い。

まとめ

✧ **Summary** —— 2 章のまとめ

- 幾何的対象を調べるためにコホモロジーという代数的不変量を考えるが、
  これはしばしば six-functor formalism への “categorification” をもつ。
- six-functor formalism の言葉を用いて空間の射の幾何的性質の一部を記述し、
  形式的に調べることができる（D-proper, D-smooth, D-étale, …）。
- 圏 C 上の six-functor formalism D が与えられると、それに対応して C から Gest への
  良い関手が得られ（transmutation）、この値からもとの圏 $D(X)$ が復元される。
- さらに、上の D-proper, D-smooth, D-étale などの “幾何的” 性質を、transmutation
  によって、Gestalt の射に対して定義される “幾何的” 性質で特徴づけられる。

ご清聴ありがとうございました！